МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**Снежинский физико-технический институт-**

Филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**(СФТИ НИЯУ МИФИ)**

Кафедра высшей и прикладной математики

**КУРСОВОЙ ПРОЕКТ**

**по дисциплине: «Численные методы решения математической физики на неортогональных сетках»**

Тема: «Сравнение различных способов расчета градиента скалярной функции на регулярных, неортогональных сетках»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил:  студент группы ПМ21м  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.Д. Нецветаева  студент группы ПМ21м  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_П.Р. Сиднева  Проверил:  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Э.М.Вазиев  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2022г. |

Снежинск

2022

**Содержание**

[**Введение** 3](#_Toc121427653)

[**Метод Гаусса - Грина** 3](#_Toc121427654)

[**Метод наименьших квадратов (МНК)** 7](#_Toc121427655)

[**Практическое вычисление градиента в ячейке** 10](#_Toc121427656)

[**Результаты** 11](#_Toc121427657)

[Пример №1 11](#_Toc121427658)

[Пример №2 18](#_Toc121427659)

[**Заключение** 24](#_Toc121427660)

[***Приложение А*** 25](#_Toc121427661)

**Введение**

Для численного решения задач переноса и теплопроводности в двумерной постановке на неортогональной сетке возникает задача вычисления градиента функции в ячейке, если известны значения самой функции в этой и соседних ячейках.

Этой задаче и посвящена данная курсовая работа.

# **Метод Гаусса - Грина**

Из теоремы Гаусса -Грина:

где - область интегрирования;

– граница области .

Допустим постоянен в области интегрирования, тогда

Допустим - некоторая ячейка 0, окружённая кусочно-линейным контуром по множеству узлов , тогда перейдём от интегрирования к суммированию:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где множество узлов;

сумма двух нормалей границ, содержащих точку k;

площадь области (ячейки).

Пример №1 (неравномерная по углу сетка).

Способ 1:

длина ребра

Контур проводим через середину ребер к центрам ячейки (рис. 1)

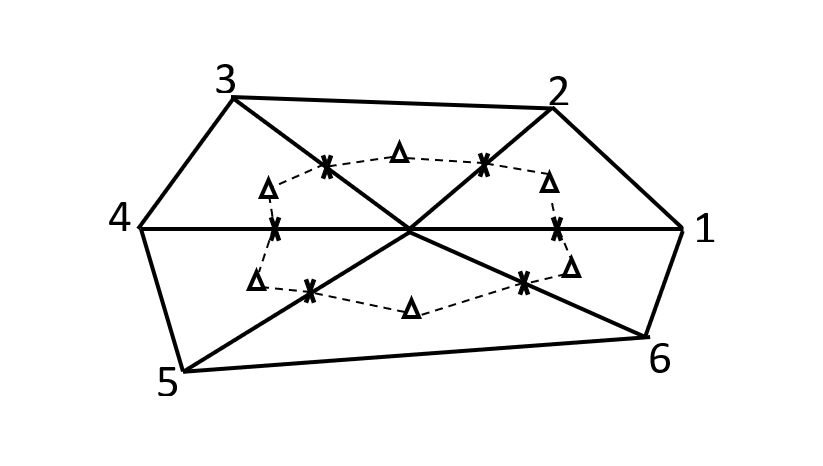


Рисунок 1.

Оценка погрешности Гаусса-Грина получена разложением в ряд Тейлора:

т.к. первого порядка, то формула дает первый порядок точности.

Способ 2:

Контур проводим напрямую к центрам ячейки (рис. 2)

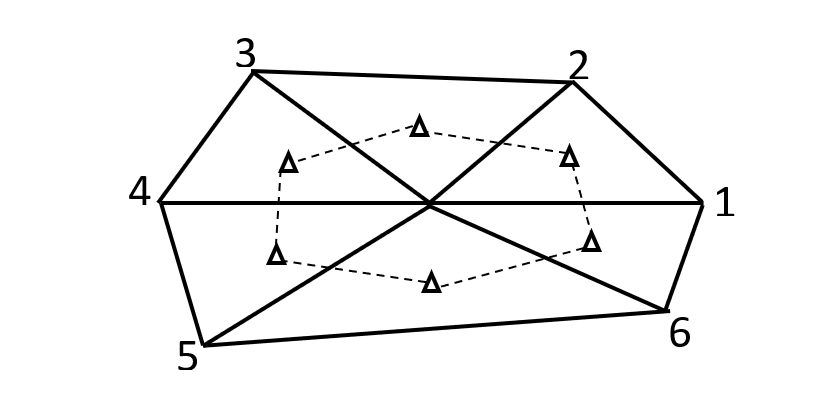


Рисунок 2 – неравномерная по углу сетка

Оценка погрешности Гаусса-Грина получена разложением в ряд Тейлора:

Так же получили первый порядок точности.

Пример 2 (равномерная сетка).

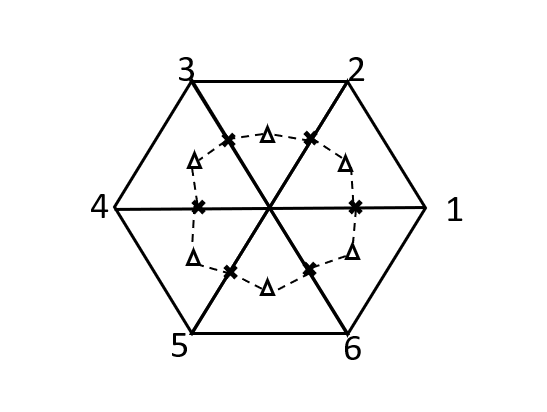


Рисунок 3 – равномерная сетка

Все углы и длины сторон равны.

Оценка погрешности Гаусса-Грина получена разложением в ряд Тейлора:

Получили второй порядок точности.

# **Метод наименьших квадратов (МНК)**

Допустим, известен, тогда можно найти приближённое значение функции в любой точке в окрестности точки 0, зная значение функции в точке 0:

где компоненты градиента

Найдём сумму взвешенных квадратов ошибок для каждой соседней ячейки:

где вес.

Минимизируем этот функционал, чтобы найти компоненты градиента. Для этого найдём производные от компонент градиента и приравняем их к нулю.

Введем

*;*

*;*

Тогда получим компоненты градиента:

Разложив в ряд Тейлора для сетки (1), получим:

Схема имеет первый порядок точности для сетки (1).

Для сетки (2):

Схема имеет второй порядок точности.

# **Практическое вычисление градиента в ячейке**

Определим градиент в ячейке 0, с координатами . – координаты центров соседних ячеек. Перейдём в начало координат:

Определение порядка:

1. Вычисляем градиент исследуемым методом для некоторой ячейки
2. Вычисляем норму градиента:

Где , – точное значение компонент градиента.

1. Уменьшаем ячейку в два раза, повторяем 1 и 2 пункты

Вычисляем порядок:

# **Результаты**

Пример №1

:

(Сюда закидываешь все новые графики CellEnd1, norma1, SH1 вместо этих)

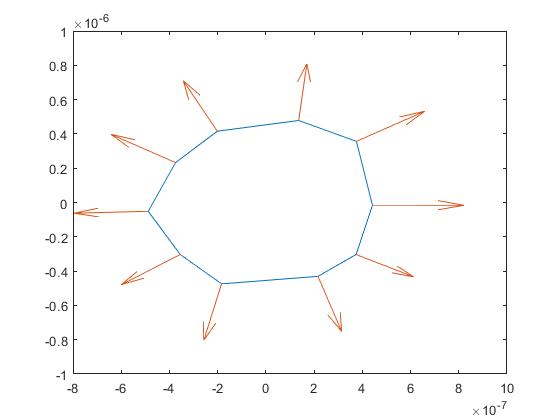


Рисунок 4 - неравномерная сетка

Вычислили норму градиента для метода Гаусса -Грина (рис. 5) и МНК (рис. 6):

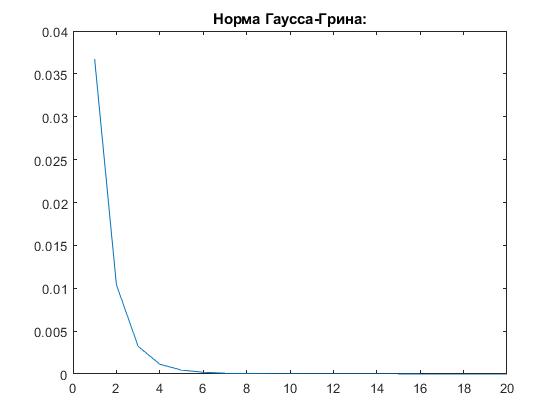


Рисунок 5

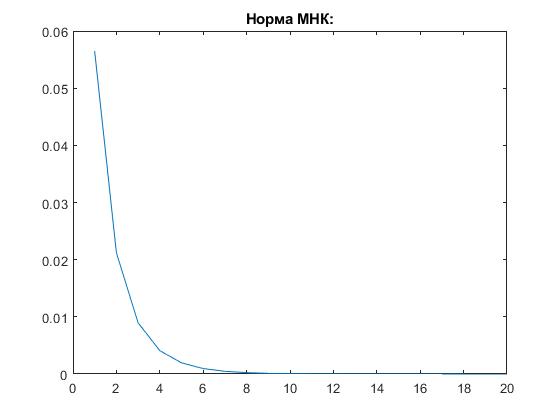


Рисунок 6

Получили первый порядок для метода Гаусса- Грина(рис.7) и МНК (рис.8):

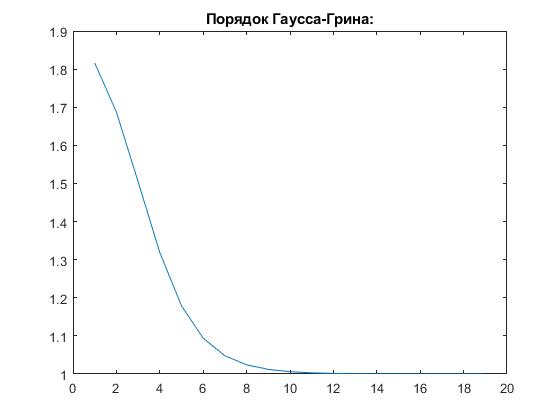


Рисунок 7

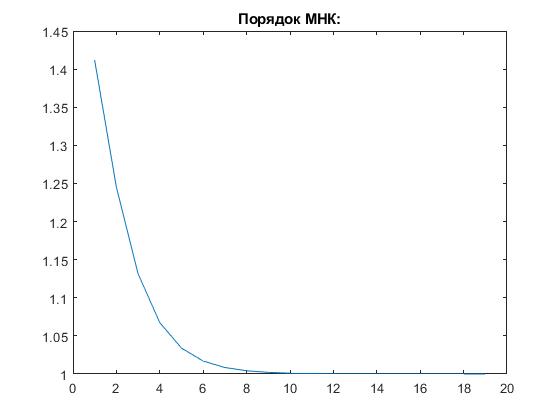


Рисунок 8

Далее берем равномерную сетку:

(Сюда закидываешь все новые графики CellEnd2, norma2, SH2 вместо этих)

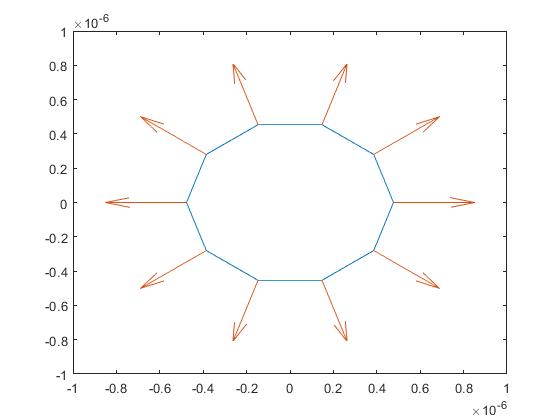


Рисунок 9 - равномерная сетка

Получили норму градиента для метода Гаусса -Грина (рис. 10) и МНК (рис. 11):

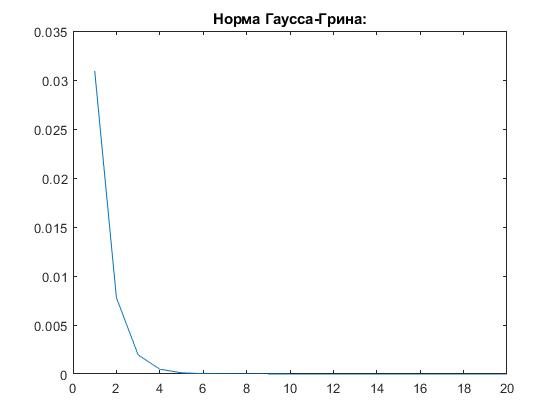


Рисунок 10

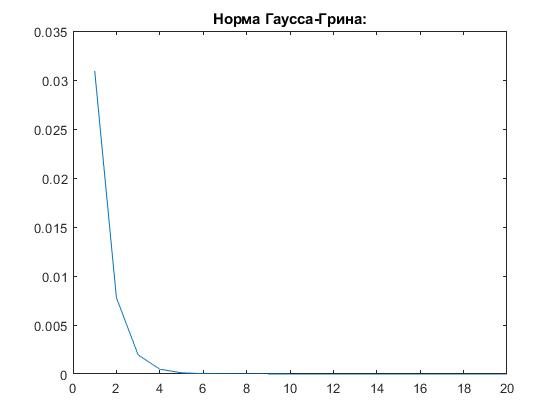


Рисунок 11.

Получили второй порядок точности для метода Гаусса- Грина (рис.12) и МНК (рис.13):

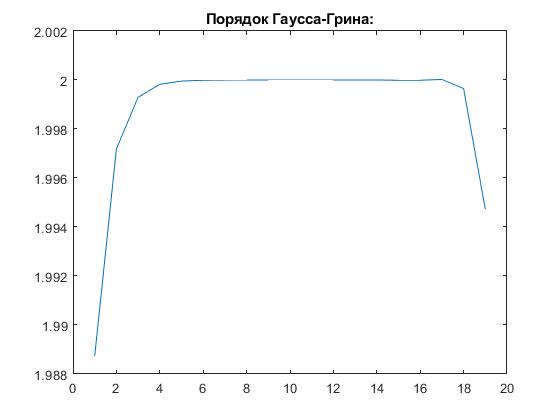


Рисунок 12

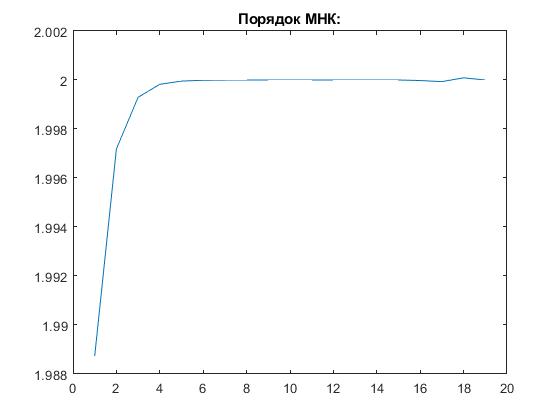


Рисунок 13

Пример №2

:

(Сюда закидываешь все новые графики CellEnd3, norma3, SH3 вместо этих)

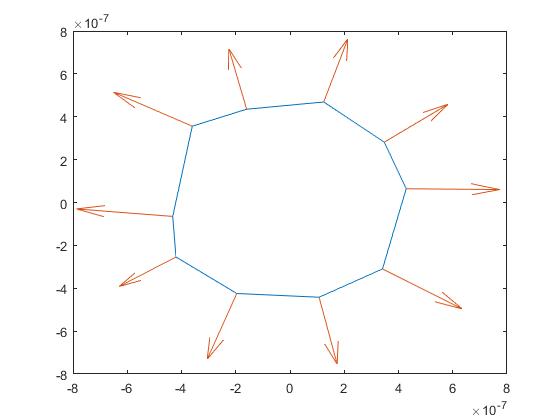


Рисунок 14 - неравномерная сетка

Получили норму градиента для метода Гаусса -Грина (рис. 15) и МНК (рис. 16):

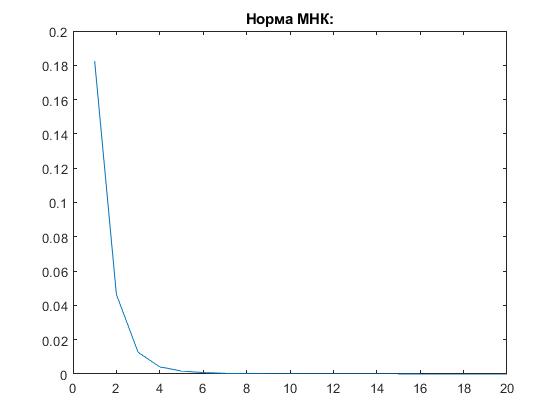


Рисунок 15

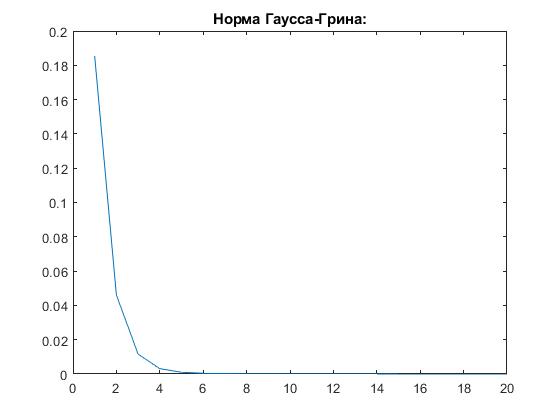


Рисунок 16

Получили первый порядок точности для метода Гаусса- Грина (рис.17) и МНК (рис.18):

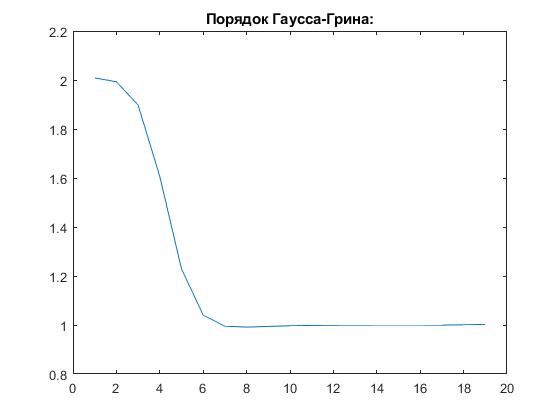


Рисунок 17

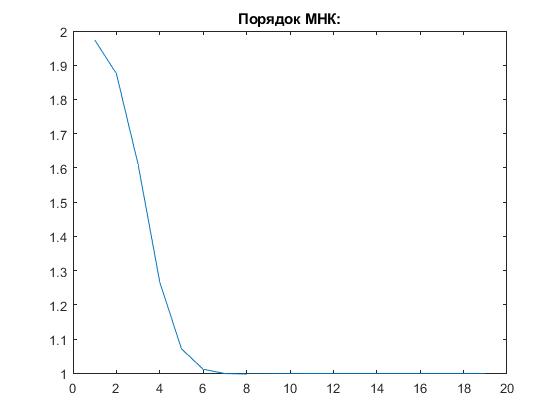


Рисунок 18

Далее берем равномерную сетку:

(Сюда закидываешь все новые графики CellEnd4, norma4, SH4 вместо этих)

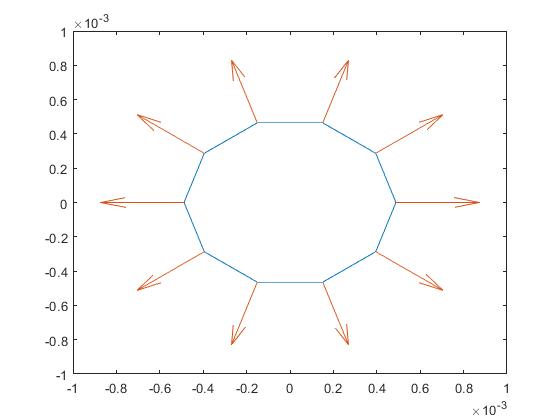


Рисунок 19

Получили норму градиента для метода Гаусса -Грина (рис. 20) и МНК (рис. 21):

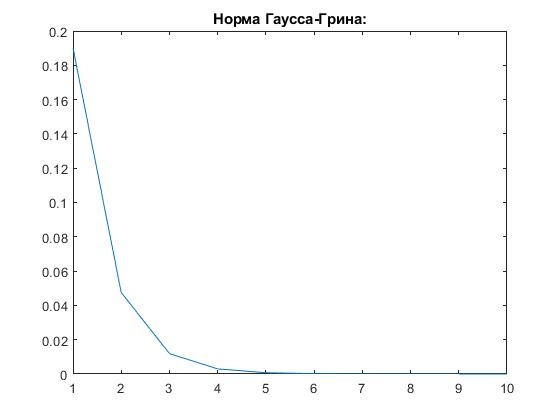


Рисунок 20

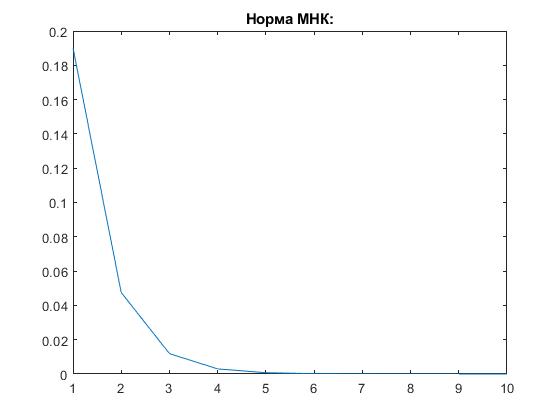


Рисунок 21

Получили второй порядок точности для метода Гаусса- Грина (рис.22) и МНК (рис.23):

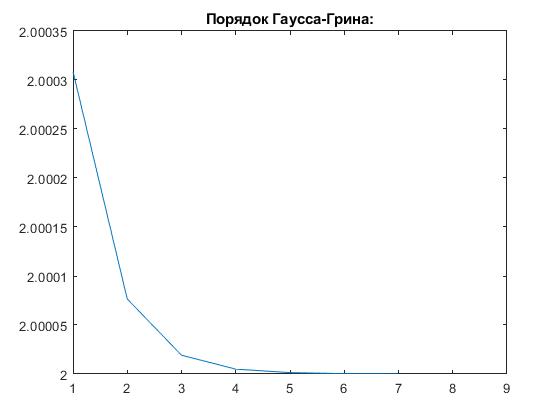


Рисунок 22

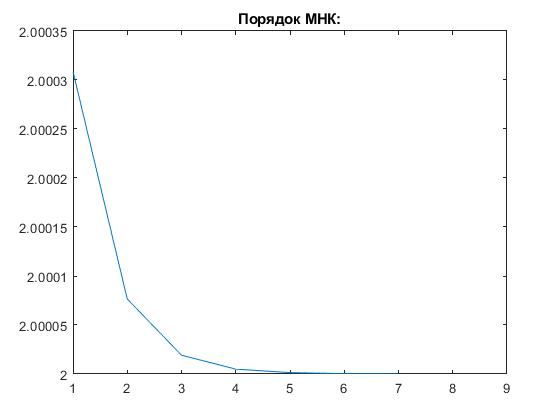


Рисунок 23

**Заключение**

В данной курсовой работе была написана программа для вычисления градиента в ячейке методом Гаусса - Грина и методом наименьших квадратов на языке MatLab.

По погрешностям вычислений определили, что на регулярных сетках оба метода считаются с одинаковой точностью. На неравномерных сетках метод Гаусса - Грина чаще выдает более точные результаты в отличии от метода наименьших квадратов.

Также были вычислены порядки сходимости методов Гаусса-Грина и МНК от размера ячейки. Оба метода первого порядка сходимости для неравномерной сетки и второго для равномерной сетки, что сходится с теорией.

# ***Приложение А***

clear all

close all

clc

%вычисляем градиент в узле. который находится в центре координат, если нам

%будет дана задача, где узел находится не в центре координат

%мы перенесем всю систему координаты узла в котором ищем градиент

Kr = 0; %Вклад рандома в расстояние между ячейками

Kfi = 1; %вклад рандома в угловое расстояние между ячейками

N=6; %число соседних ячеек

M = 200; %начальный делитель для сетки, 1/M - начальный примерный размер сетки

for i= 1:N

r(i) = 2\*(1+(rand()-0.5)\*Kr)/M; %рандомим заранее, чтобы ячейки

fi\_rand(i) = Kfi\*2\*pi/N\*(rand()-0.5); %всех размеров были подобны друг другу

end

NSells = 10; %число размеров ячеек

for j=1:NSells

clear xu yu;

for i= 1:N

r(i) = r(i)/2; %уменьшаем ячейку в 2 раза

xu(i)=r(i)\*cos(2\*pi/N\*(i-1)+fi\_rand(i));%массивы координат центров соседних ячеек

yu(i)=r(i)\*sin(2\*pi/N\*(i-1)+fi\_rand(i));

end

u = (xu).^2+sin(yu); %значение функции в соседних ячейках

u0 = 0; %значение функции в центральной ячейке

ax\_ex = 0; %точное значение x компоненты градиента

ay\_ex = 1; %точное значение y компоненты градиента

xu(N+1) = xu(1);

yu(N+1) = yu(1);

x= xu/2; %массивы координат центров отрезков между центрами ячеек - "вершины"

y= yu/2;

%Метод Гаусса-Грина

for i=1:N

y\_g = y(i+1)-y(i);

x\_g = x(i+1)-x(i);

S(i) = abs(x(i)\*y(i+1)-y(i)\*x(i+1))\*0.5; %площадь треугольника между центром центральной ячейки и "гранью"

nx(i) =y\_g; %компоненты нормали к "граням"

ny(i) = -x\_g; %("грань" - отрезок между соседними "вершинами")

end

n0x(1) = (nx(1) + nx(N))/2;

n0y(1) = (ny(1) + ny(N))/2;

for i= 2:N

n0x(i) = (nx(i) + nx(i-1))/2; %компоненты средних нормалей для "вершин"

n0y(i) = (ny(i) + ny(i-1))/2;

end

%Нахождение градиента методом Гаусса-Грина

gradu\_x(j) = 0.5\*sum((u+u0).\*n0x)/sum(S);

gradu\_y(j) = 0.5\*sum((u+u0).\*n0y)/sum(S); %компоненты градиента функции, вычисленные методом Гаусса-Грина

%Метод наименьших квадратов

Lx(1:N) = xu(1:N)-0; %все переменные названы как в лекциях

Ly(1:N) = yu(1:N)-0;

f=u(1:N)-u0;

Lxx=sum(Lx.\*Lx);

Lxy=sum(Lx.\*Ly);

Lyy=sum(Ly.\*Ly);

%Нахождение градиента методом наименьших кватратов

ax(j)=(Lyy.\*sum(Lx.\*f)-Lxy.\*sum(Ly.\*f))/(Lxx.\*Lyy-Lxy.\*Lxy); %компоненты градиента функции, вычисленные МНК

ay(j)=(Lxx.\*sum(Ly.\*f)-Lxy.\*sum(Lx.\*f))/(Lxx.\*Lyy-Lxy.\*Lxy);

normaMNK(j) = sqrt((ax\_ex-ax(j))^2+(ay\_ex-ay(j))^2);

normaGG(j) = sqrt((ax\_ex-gradu\_x(j))^2+(ay\_ex-gradu\_y(j))^2);

M=M\*2;

end

M = M/2^(NSells-1);

figure();

plot(x,y);

hold on

quiver(x(1:N),y(1:N), n0x, n0y)

xlabel('x');

ylabel('y');

for j=1:NSells-1

SHMNK(j)=log2(normaMNK(j)/normaMNK(j+1));

SHGG(j)=log2(normaGG(j)/normaGG(j+1));

SizeSell(j)=1/(M\*2^(j-1));

end

figure();

plot(SizeSell,SHMNK);

hold on

plot(SizeSell,SHGG);

legend('МНК','метод Гаусса-Грина');

xlabel('примерный размер ячейки')

ylabel('порядок сходимости')

SizeSell(NSells)=1/(M\*2^(NSells-1));

figure();

plot(SizeSell,normaMNK);

hold on

plot(SizeSell,normaGG);

legend('МНК','метод Гаусса-Грина');

xlabel('примерный размер ячейки')

ylabel('норма')